2018年 12 月
第13卷 第12期

电工工程学报
JOURNAL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Dec. 2018
Vol.13 No. 12

DOI：10.11985/2018.12.007

基于改进Prony法的电力系统低频振荡快衰分量辨识

牟建伟 尚亚男 刘文刚 戴思源 江 澎 王保力 王延勃

（国网辽宁省电力有限公司大连供电公司 大连 116001）



牟建伟 男 1971年生，工程师，主要从事变电技术及信号辨识技术方面的工作研究。



尚亚男 男 1986年生，工程师，主要从事电力系统稳定性分析方面的工作研究。

摘要：考虑到传统Prony算法对电力系统低频振荡模式中含有衰减较快的分量分析非常困难以及容易丢失衰减较快分量的问题，提出一种改进的快速衰减信号的提取方法——基于Givens变换的Prony分段分析法。该方法将采样时间划分为两个时段，首先分析第二时段求慢速衰减分量，然后分析第一时段求快速衰减分量。最后通过算例验证了该算法可以准确提取低频振荡模式中的快速衰减分量，同时也使得慢速衰减分量更加准确。

关键词：低频振荡 Prony算法 快速衰减分量 Givens变换 分段分析 精确性

中图分类号：TM74

An Identification Method Based on Improved Prony for Fast Attenuate Component of the Power System Low-Frequency Oscillation

Mu Jianwei Shang Yanan Liu Wengang Dai Siyuan Jiang Peng Wang baili Wang Yanbo

(Dalian Power Supply Company of the State Grid Liaoning Province Electric Power Company Limited Dalian 116001 China)

Abstract: Considering that the traditional Prony algorithm is very difficult to analyze the fast attenuate component of the power system low frequency oscillation mode and the fast attenuate component can be missed easily, an improved method of extracting rapid attenuate signal is proposed which is called Prony segment analysis method based on Givens transform. This method divides the data acquisition time into two periods, and the second period is analyzed firstly to calculate the slow attenuate component, then the first period is analyzed for calculating the fast attenuate component. Numerical example proves that this algorithm can accurately extract fast attenuate component of low frequency oscillation mode, and also makes the slow attenuate component more accurate.

Keywords: Low frequency oscillation, Prony method, fast attenuation, Givens transform, segment analysis, accuracy

收稿日期：2018-09-21

本文提出的改进算法已获国家发明专利（专利号：2016100315119）。

1 引言

随着我国特高压输电网络的引入以及跨大区域联网进程的加快，低频振荡 [1] 成为影响电网安全稳定的重要问题，持续的振荡可能会毁坏电力设备继而诱发相继事故的发生，造成严重的后果。

实测数据分析表明，辨识振荡模式方法有短时傅里叶变换（Short-Time Fourier Transform，STFT）[2]、小波分析法 [3-4]、Prony 算法和 HHT 变换法 [5-7] 等。综合考虑运算量、耗时及适用性，选择 Prony 算法，该算法可以直接从时域中通过拟合求得信号的模态信息，不需要通过频率响应求取，计算量大大减少，适用性较强。

为了更有效地分析系统的低频振荡，提取全部的振荡特征，本文将传统的 Prony 算法进行改进，将基于 Givens 变换的 Prony 算法进行分段分析。Givens 变换处理时不用形成法方程，可以直接由特征方程求出特征方程系数，避免了原算法求解法方程困难和误差较大的问题；其次，分段后能够非常准确地辨识出低频振荡模式中的快速衰减分量，并且慢速衰减分量也更加精确。

2 Prony 算法计算步骤

Prony 算法 [8-11] 是提取平稳振荡模式的常用算法。它针对等间距采样点，假设模型是由一系列具有任意振幅、相位、频率和衰减因子的 q 个指数函数的线性组合，其离散时间的函数形式为

$$x(t)=\sum_{i=1}^{q}A_i e^{\alpha_i t}\cos(2\pi f_i t+\theta_i) \qquad (1)$$

式中，A_i 为振幅；θ_i 为初相（rad）；f_i 为振荡频率（Hz）；α_i 为衰减因子（阻尼）；q 为信号阶数。

设式（1）中有 q 个衰减正弦分量，然后将余弦式用欧拉公式表示，即

$$\cos(2\pi f_i t+\theta_i)=\frac{1}{2}\left[e^{j(2\pi f_i t+\theta_i)}+e^{-j(2\pi f_i t+\theta_i)}\right] \qquad (2)$$

令 $p=2q$，则离散时间的函数形式可表示为

$$\hat{x}(n)=\sum_{i=1}^{p}b_i z_i^n \quad n=0,1,\cdots,N-1 \qquad (3)$$

Prony 法的关键是要认识到式（1）是一个常系数线性差分方程的齐次解。即有

$$\hat{x}(n)=-\sum_{i=1}^{n}a_i\hat{x}(n-k) \qquad (4)$$

通过一系列的数学变换，可得到差分方程式为

$$\hat{x}(n)=-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\hat{x}(n-k) \quad n=p,\cdots,N-1 \qquad (5)$$

为建立 Prony 算法，定义实际测量值 $x(n)$ 和估计值 $\hat{x}(n)$ 的误差为 $e(n)$，即

$$x(n)=\hat{x}(n)+e(n) \quad n=0,\cdots,N-1 \qquad (6)$$

将式（5）代入式（6），可得

$$\begin{aligned}\hat{x}(n)&=-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\hat{x}(n-k)+e(n)\\&=-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x(n-k)+\sum_{k=0}^{p}\alpha_k e(n-k)\end{aligned} \qquad (7)$$

由式（7）可以看出，此模型是一个由误差 $e(n)$ 所激励的自回归滑动平均（Auto Regressive Moving Average）模型 ARMA(p, p)，它具有相同的自回归（Auto Regressive，AR）和滑动平均（Moving Average，MA）参数（a_i）。为使模拟信号更加逼近于真实信号，可采用平方误差最小原则，即关于 a_1, $\cdots$, a_{p-1}, a_p 的最小二乘估计使得 $\sum_{n=p}^{N-1}|e(n)|^2$ 值最小，由此将得到一组有一定求解难度的非线性方程。

改变误差估计的目标函数可以避免求解非线性方程，令 $\varepsilon(n)=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k e(n-k)$，则式（7）可变为

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x(n-k)+\varepsilon(n) \quad n=p,\cdots,N-1 \qquad (8)$$

所以，变 $\sum_{n=p}^{N-1}|e(n)|^2$ 最小即 $\sum_{n=p}^{N-1}|\varepsilon(n)|^2$ 最小，这就是扩展的 Prony 算法。扩展的 Prony 算法即求解下列矩阵方程

$$\begin{pmatrix}x(p) & x(p-1) & \cdots & x(0)\\ x(p+1) & x(p) & & x(1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(N-p-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon(p)\\ \varepsilon(p+1)\\ \vdots\\ \varepsilon(N-1)\end{pmatrix} \qquad (9)$$

为使目标函数 $J(\alpha)=\sum_{n=p}^{N-1}|\varepsilon(n)|^2$ 为最小值，令 $\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i}=0$，则有

$$\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\left[\sum_{n=p}^{N-1}x(n-k)x^*(n-i)\right]=0 \quad i=1,\cdots,p \qquad (10)$$

对应的最小误差能量为

$$\varepsilon_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \left[\sum_{n=p}^{N-1} x(n-k)x^*(n) \right] \tag{11}$$

定义$r(i,k)=\sum_{n=p}^{N-1} x(n-k)x^*(n-i)$，$i,j=0,\cdots,p$。得到 Prony 算法的法方程形式为

$$\begin{pmatrix} r(0,0) & r(0,1) & \cdots & r(0,p) \\ r(1,0) & r(1,1) & & r(1,p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r(p,0) & r(p,1) & \cdots & r(p,p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

求解式（12），可得参数 $a_1,\cdots,a_p$ 和最小误差能量 ε_p 的估计值。然后将 $a_1,\cdots,a_p$ 代入特征方程，进一步求解，得到特征根 z_i，$i=1,2,\cdots,p$。则式（3）可简化为关于 b_i 的线性方程，用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{\Phi b} = \hat{\boldsymbol{x}} \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & & z_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{b} = [b_1,\cdots,b_p]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = [\hat{x}(0),\cdots,\hat{x}(N-1)]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

则

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Phi}]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{17}$$

式中，上标 H 代表共轭转置。在求解过程中，可通过下述关系式来减少计算量，提高计算效率，即

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \cdots & \beta_{pp} \end{pmatrix} \tag{18}$$

其中

$$\beta_{ij} = \frac{(z_i^* z_j)^N - 1}{(z_i^* z_j) - 1} \tag{19}$$

式（19）中，“*”代表共轭。

上述过程中，由于事先不知道低频振荡中各频率分量的个数，即式（9）中的 p 不确定，同时为了提高算法的精度，可以把模型的阶数取得大些（即取 $p_e > p$），再通过相应方法计算出方程组系数矩阵的有效秩 p。

利用式（20）计算频率 f_i、衰减因子 α_i、相位 θ_i、振幅 A_i，即

$$\begin{cases} f_i = \arctan[\mathrm{Im}(z_i)/\mathrm{Re}(z_i)]/(2\pi\Delta t) \\ \alpha_i = \ln|z_i|/\Delta t \\ \theta_i = \arctan[\mathrm{Im}(b_i)/\mathrm{Re}(b_i)] \\ A_i = |b_i| \end{cases} \tag{20}$$

3 Prony 算法的改进

3.1 传统计算方法

在利用 Prony 算法对电力系统低频振荡信号进行求解的过程中，对于特征方程系数的求解是整个求解过程的核心。传统的计算方法是利用 Prony 算法的法方程形式进行求解，得到特征方程系数 a 的值。

将式（9）简写为

$$\boldsymbol{X}a = \boldsymbol{d} \tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 为由采样数据形成的系数矩阵；a 为特征方程系数；$\boldsymbol{d}$ 为信号误差。

式（21）的法方程形式为

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}a = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \tag{22}$$

利用高斯消去法对式（22）进行求解，求得特征方程系数 a。

上述即为基于法方程 [12-13] 形式的 Prony 算法的传统计算方法。

3.2 分段分析法

现选用 Givens 方法对特征方程系数进行求解。利用 Givens 变换 [14-16] 对方程进行求解，得到特征方程系数时，不用形成法方程，可以直接对式（21）进行求解。Givens 变换方法在处理不含快速衰减分量的信号时，能够非常准确地求出信号的参数值，但在处理含快速衰减分量的信号，尤其是含有两个以上快速衰减分量的信号时，Givens 方法及其他传统方法不一定能够取得较好的计算结果，有时甚至会丢失衰减较快的分量。

为解决上述问题，本文在 Givens 变换方法的基础上，提出了一种改进方法——分段分析法。其具体实施步骤如下：

（1）读入采样数据。设采样间隔为 Δt，采样时长为 T。为了能够精确提取快速衰减分量，要求采样频率在 0.01s 附近取值，则此采样数据的采样间隔为 Δt，时长为 T，采样值个数为 $T/\Delta t$。

（2）时段划分。将总的时间长度分为两个时段，即第一时段时长为 t_1，剩余时段划分为第二时段，时长为 $T-t_1$。第一时段和第二时段的分割点为 t_s。

（3）第二时段 Prony 法低频振荡分析。此时段分析慢速衰减分量，采样间隔 Δt_2 为 t_b，从 t_s 时刻开始每间隔 t_b 从采样数据中取一个采样值，即每隔 $t_b/\Delta t$ 个采样数据取一个分析。具体分析过程为：①从 t_s 时刻开始每间隔 t_b 从采样数据中取一个采样值，直到 T 结束；②对经过消噪处理后的采样数据进行滤波，滤掉信号中的高频成分；③首先选取阶数 q_e，q_e 大于有效秩 p，然后根据滤波后的采样数据形成扩展阶矩阵 $\boldsymbol{R}_e$，采用奇异值分解法对扩展阶矩阵 $\boldsymbol{R}_e$ 进行计算，求出扩展阶矩阵的所有奇异值，进而确定扩展阶矩阵 $\boldsymbol{R}_e$ 的有效秩 p；④重新选取阶数 n，n 稍大于有效秩 p，小于 q_e；⑤用 Givens 变换求式（21）的系数 a；⑥将第⑤步求出的系数代入特征方程，求出特征根 z_i；⑦将特征根代入式（20），求出频率和衰减因子；⑧利用式（17）～式（19）求出参数 b_i；⑨将 b_i 代入式（20），求出幅值和初相；⑩最后将四个参数——频率、衰减因子、幅值和初相代入式（1）得到慢速衰减分量信号的表达式 $x_2(t)$。

（4）第一时段采样数据处理。第一时段中有快速衰减分量和慢速衰减分量。设第一时段采样间隔 Δt_1 为 t_a，从 0 s 开始进行采样，直到 t_s 时刻为止。将这些时刻点代入第（3）步已经求出的慢速衰减分量表达式 $x_2(t)$ 中，得到这一时间段每个时刻点对应的慢速衰减数据，然后用第一时间段的采样数据减去刚才求出的慢速衰减数据，得到快速衰减数据。

（5）第一时段 Prony 法低频振荡分析。同理，采用与第（3）步相同的方法分析已经得到的快速衰减数据，就可以求出快速衰减分量的四个模态信息。

下图为本文采用的 Prony 法分段分析法低频振荡模式分析的流程图。

采用分段分析法后，使得 Givens 方法在对含快速衰减分量低频信号的求解效果得到了很大的改善。

4 算例分析

为验证本文采用改进的 Prony 法分段分析法能够准确地提取含快速衰减分量的低频振荡信号，本

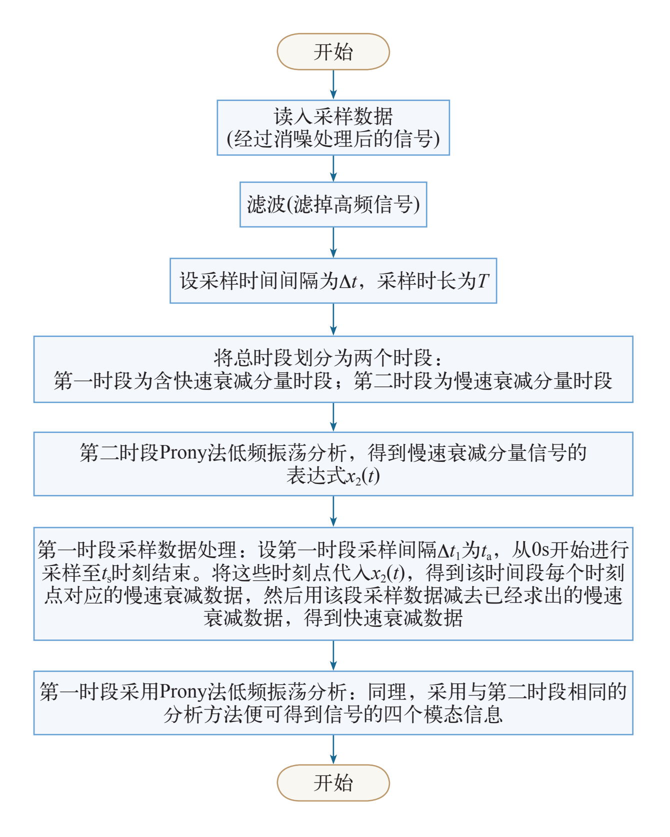


图 Prony 法分段分析法低频振荡模式分析流程图

Fig. Flow chart of low frequency oscillation mode analysis by Prony method

节首先将本改进算法和基于法方程形式的 Prony 法分段分析算法进行分析，其次将本改进算法与基于 Givens 变换不分段时的情况进行算例分析对比，最后验证了本改进算法具有很好的提取效果，能够十分准确地提取快速衰减分量。

构造输入信号为

$$\begin{aligned} x(t)=&10\mathrm{e}^{-0.0027t}\cos(2\pi\times0.423t+110^{\circ})+\\ &2\mathrm{e}^{-0.2652t}\cos(2\pi\times0.42t+13^{\circ})+\\ &10\mathrm{e}^{-0.0311t}\cos(2\pi\times0.2473t+20^{\circ})+\\ &1\mathrm{e}^{-0.2936t}\cos(2\pi\times1.0349t+60^{\circ})+\\ &5.8\mathrm{e}^{-45.8788t}\cos(2\pi\times2.4t+10^{\circ})+\\ &6.3\mathrm{e}^{-55.1156t}\cos(2\pi\times0.9t+60^{\circ}) \end{aligned} \quad (23)$$

信号模型阶数 n 统一取为 15。上述信号包含 6 个正弦分量，等效为 12 个复指数分量。对上述信号每 0.01s 计算一个值，共计算 1 000 个值，用来模拟采样值，则此采样数据的采样间隔为 0.01s，时长为 10s，采样值个数为 1 000。各信号分量参数见表 1。

4.1 改进算法和基于法方程形式的 Prony 分段分析

这里取信号分段点为 1s。第一时段分析快速衰减分量，采样时间间隔取 0.01s；第二时段分析

表 1 算例信号的参数

Tab.1 The parameters of the example signal

分量序号	频率 f/Hz	衰减因子 α	幅值 A	初相 θ/(°)
1	0.423 0	−0.002 7	10.000 0	110.000 0
2	0.420 0	−0.265 2	2.000 0	13.000 0
3	0.247 3	−0.031 1	10.000 0	20.000 0
4	1.034 9	−0.293 6	1.000 0	60.000 0
5	2.400 0	−45.878 8	5.800 0	10.000 0
6	0.900 0	−55.115 6	6.300 0	60.000 0

慢速衰减分量，采样时间间隔取 0.1s。表 2 为基于 Givens 变换和法方程形式 Prony 法分段分析法计算结果比较。

表 2 两种算法的计算结果比较

Tab.2 Comparison of calculation results of two kinds of algorithms

分量序号	方法	频率 f/Hz	衰减因子 α	幅值 A	初相 θ/(°)
1	Givens 变换	0.423 0	−0.002 7	10.000 0	110.000 0
	法方程形式	0.423 0	−0.002 7	9.999 9	109.999 3
2	Givens 变换	0.420 0	−0.265 2	2.000 0	13.000 0
	法方程形式	0.420 0	−0.265 2	1.999 8	13.000 9
3	Givens 变换	0.247 3	−0.031 1	10.000 0	20.000 0
	法方程形式	0.247 3	−0.031 1	10.000 0	20.000 0
4	Givens 变换	1.034 9	−0.293 6	1.000 0	60.000 0
	法方程形式	1.034 9	−0.293 6	1.000 0	60.000 0
5	Givens 变换	2.400 0	−45.878 7	5.800 1	9.999 1
	法方程形式	2.365 9	−45.923 0	6.214 1	12.011 8
6	Givens 变换	0.900 0	−55.115 8	6.300 1	60.002 8
	法方程形式	1.528 5	−56.554 5	2.421 7	60.193 5

由表 2 可见，对于分量 1 ～分量 4 即慢速衰减分量，基于 Givens 变换的分段分析和基于法方程形式的分段分析都能准确地提取模态信息，但对于快速衰减分量，后者辨识出的分量 6 的频率为 1.528 5 Hz，而理论值为 0.900 0Hz；幅值为 2.421 7，理论值为 6.300 1，已出现严重偏差。基于 Givens 变换的分段分析法辨识出的快速衰减分量精确度很高，与理论值误差很小。

4.2 Givens 变换方法的分段和不分段分析

信号分段点选为 1s。表 3 为基于 Givens 变换的分段和不分段分析的计算结果比较。

由表 3 可见，基于 Givens 变换的分段法能十分准确地提取各振荡特征的低频信号的模态信息；不分段时，对于快速衰减分量 6 却无法辨识。该算例说明，本文采用的分段法效果较好，能十分准确地辨识出信号中的快速衰减分量。

表 3 Givens 变换方法的分段和不分段计算结果比较

Tab.3 Comparison of the results of the segmentation and the whole calculation of the Givens transform method

分量序号	方法	频率 f/Hz	衰减因子 α	幅值 A	初相 θ/(°)
1	分段	0.423 0	−0.002 7	10.000 0	110.000 0
	不分段	0.423 0	−0.002 7	10.000 0	110.000 0
2	分段	0.420 0	−0.265 2	2.000 0	13.000 0
	不分段	0.420 0	−0.265 2	2.000 0	13.000 0
3	分段	0.247 3	−0.031 1	10.000 0	20.000 0
	不分段	0.247 3	−0.031 1	10.000 0	20.000 0
4	分段	1.034 9	−0.293 6	1.000 0	60.000 0
	不分段	1.0349	−0.2936	1.0000	60.000 0
5	分段	2.400 0	−45.878 7	5.800 1	9.999 1
	不分段	2.426 6	−46.663 1	7.693 8	4.600 2
6	分段	0.900 0	-55.115 8	6.300 1	60.002 8
	不分段	–	–	–	–

5 结论

（1）在振荡模式不含快速衰减分量情况下，传统 Prony 算法能够较准确地辨识振荡模态信息。当振荡模式含有两个及以上快速衰减分量时，传统 Prony 算法由于采用固定的采样频率，无法捕捉衰减较快的分量，继而影响慢速衰减分量的辨识精度。

（2）本文的改进算法综合了 Givens 变换和分段 Prony 法的优点，对处理消噪后的低频振荡信号有独特优势。采用 Givens 变换避免了传统算法求解法方程困难的问题，提高了数值稳定性，减少了计算量；利用分段分析设置不同的分辨率（采样频率）避免了采用同一采样频率而丢失快速衰减分量。该算法占用内存小，能非常准确地提取快速衰减分量，适用于辨识电力系统低频振荡模式。

参考文献

[1] Calderon-Guizar J G, Ramirez-Gonzalez M, Castellanos-Bustamante R, et al. Identification and monitoring inter-area oscillations in power systems[C]. IEEE Trans. Power Tech., Eindhoven, 2015: 1-6.

[2] 郑武．短时傅里叶变换在火成岩裂缝中的测井评价方法研究 [D]．吉林：吉林大学，2016．

[3] 孙庆森，张海峰，王猛，等．小波算法在变压器励磁涌流中的应用研究 [J]．电力系统保护与控制，2017，45(8)：121-125．
Sun Qingsen, Zhang Haifeng, Wang Meng, et al. Application of wavelet algorithms in transformer inrush current[J]. Power System Protection and Control, 2017, 45 (8): 121-125.

[4] 陈国雄．基于分形与小波理论的成矿复杂信息提取与识别方法研究 [D]．北京：中国地质大学，2016．

[5] 胡昊明，郑伟，徐伟，等．Prony 和 HHT 算法在低频振荡在线辨识中的适用性比较 [J]．电力系统保护与控制，2013，41(14)：33-40．
Hu Haoming, Zheng Wei, Xu Wei, et al. Applicability comparison of Prony and HHT algorithms in on-line identification of low-frequency oscillations[J]. Power System Protection and Control, 2013, 41(14): 33-40.

[6] 杨德昌，Rehtanz C，李勇，等．基于改进希尔伯特 – 黄变换算法的电力系统低频振荡分析 [J]．中国电机工程学报，2011，31(10)：102-108．
Yang Dechang, Rehtanz C, Li Yong, et al. Low-frequency oscillation analysis of power system based on improved Hilbert-Huang transform[J]. Proceedings of CSEE, 2011, 31(10): 102-108.

[7] 李天云，高磊，赵妍．基于 HHT 的电力系统低频振荡分析 [J]．中国电机工程学报，2006，26(14)：24-30．
Li Tianyun, Gao Lei and Zhao Yan. Low-frequency oscillation analysis of power system based on HHT[J]. Proceedings of CSEE, 2006, 26(14): 24-30.

[8] Hauer J F, Demeure C J, Scharf L L. Initial results in prony analysis of power system response signals[J]. IEEE Trans. Power Systems, 1990, 5(1): 80-89.

[9] Grund C E, Paserba J J, Hauer J F, et al. Comparison of Prony and eigenanalysis for power system control design[J]. IEEE Trans. Power Systems, 1993, 8(3): 964-971.

[10] 李安娜，吴熙，蒋平，等．基于形态滤波和 Prony 算法的低频振荡模式辨识的研究 [J]．电力系统保护与控制，2015，43(3)：137-142．
Li Anna, Wu Xi, Jiang Ping, et al. Research on low frequency oscillation mode identification based on morphological filtering and Prony algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(3): 137-142.

[11] 张晓威，牛晓红，翟广锐．改进的 Prony 算法在多正弦信号频率估计中的应用研究 [J]．电力系统保护与控制，2017，45(15)：140-145．
Zhang Xiaowei, Niu Xiaohong, Zhai Guangrui. Application of improved Prony algorithm in frequency estimation of multi-sinusoidal signals[J]. Power System Protection and Control, 2017, 45(15): 140-145.

[12] 邢志斌，李姗姗，王伟，等．利用垂线偏差计算高程异常差法方程的快速构建方法 [J]．武汉大学学报 (信息科学版)，2016，41(6)：778-783．
Xing Zhibin, Li Shanshan, Wang Wei, et al. Fast construction method of normal equation for calculating elevation anomaly difference by vertical deviation[J].Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2016, 41(6): 778-783.

[13] 黄德伦，史经俭，廉琦，等．基于法方程病态的谱修正迭代算法的探讨 [J]．测绘科学，2013，38(2)：35-37．
Huang Delun, Shi Jingjian, Lian Qi, et al. Exploration of spectral correction iteration algorithm based on normal equation morbidity[J]. Surveying and Mapping Science, 2013, 38(2): 35-37.

[14] 魏子卿．用 Givens 变换解最小二乘问题 [J]．测绘工程，1996，5(2)：1-7．
Wei Ziqing. Solving the least square problem by givens transform[J]. Surveying and Mapping Engineering, 1996, 5(2): 1-7.

[15] Pandian A, Parthasarathy K, et al. Towards faster givens rotations based power system state estimator[J]. IEEE Trans. Power Systems, 1999, 14(3): 837-843.

[16] 杜鹃，冯思臣．复矩阵的 Givens 变换及其 qr 分解 [J]．成都理工大学学报 (自然科学版)，2011，38(6)：693-696．
Du Juan, Feng Sichen. Givens transformation of complex matrix and its QR decomposition[J]. Journal of Chengdu University of Technology (Natural Science Edition), 2011, 38(6): 693-696.